Una aproximación a la continuidad de los números reales a partir del Sistema de Numeración Decimal: Lecciones del Tratado de Aritmética Elemental (Indalecio Liévano, 1856)

Gilberto Obando-Zapata
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
gilberto.obando@udea.edu.co

En este taller abordaremos el análisis de un episodio de la historia de las matemáticas en Colombia, a partir del libro *Tratado de Aritmética Elemental*, (Liévano, 1856), publicado en Colombia a mediados del siglo XIX. El valor histórico de este trabajo debe entenderse en el marco de una república naciente, luego de la campaña libertadora que nos llevó a la independencia de España. En estos inicios de la república, Colombia buscaba proyectarse en el mundo moderno del desarrollo industrial, pero tenía que luchar con siglos de atraso producto de la colonización española, y este libro es resultado del esfuerzo de un patriota que buscaba aportar al desarrollo de la ciencia en el país. De otro lado, el valor matemático radica en la forma novedosa (para la época) de presentar la aritmética sobre la base de las nociones de cantidad y magnitud, en lo que se aparta de la tradición euclidiana. Igualmente hay originalidad en la forma de abordar un problema abierto y central para la ciencia europea del momento: la continuidad de los números reales. Hacia mediados del siglo XIX demostrar de forma rigurosa la continuidad de los reales era uno de los problemas centrales para las matemáticas del momento. La solución dada por Liévano (1856) adelantó casi en 20 años las soluciones dadas por Cantor (1915) y Dedekind (1927).

En síntesis, el proceso seguido por Liévano se puede resumir como sigue (por supuesto, expresando sus ideas en lenguaje moderno, no necesariamente cercano al utilizado por el autor en su obra):

1. Realiza una presentación de los números naturales (enteros en palabras del autor) y racionales (fraccionarios y quebrados, en palabras del autor), fundamentada en las magnitudes y sus medidas. De esta forma, ambos sistemas numéricos tienen el mismo fundamento: la noción de razón.
    a. Los números naturales son presentados a partir de la medida entera (razón n-veces), y presenta la numeración decimal no solo para representar los números, sino para estudiar las relaciones y operaciones entre ellos, al igual que sus propiedades.
    b. Los números racionales, son presentados igualmente a partir de la medida de magnitudes, con fundamento de la noción de parte alícuota (fracción de la forma

1/n), lo que le permite extender a los racionales, las propiedades aritméticas estudiadas previamente sobre los números naturales. Igualmente, se apoya en la escritura en notación decimal, para mostrar que las formas de operar con los racionales son similares a las de operar con los naturales.

2. Luego de mostrar que tanto naturales como racionales, al ser representados en notación decimal, tienen las mismas reglas de operación, estudia algunas propiedades de los racionales basadas en la estructura de la numeración decimal. De esa forma demuestra que todo número racional tiene una representación en forma de número decimal, pero que no todo número decimal se corresponde con un número racional.
3. En los siguientes pasos, aborda el problema de la continuidad de los números reales (no sobra decir que el autor no refiere explícitamente las nociones modernas de continuidad ni de límite):
   a. Para demostrar que existen números decimales que no son números racionales (números inconmensurables, en palabras de Liévano), Liévano primero muestra que todo número inconmensurable se puede representar por una sucesión acotada (creciente) de números racionales, con un error tan pequeño como se quiera. Con esto demuestra que los números irracionales se pueden expresar en notación decimal. Para lo anterior se apoya en las propiedades de la numeración decimal, en particular, el caso de los números periódicos infinitos de periodo 9, a partir de alguna cifra dada.
   b. Con las anteriores ideas, extiende las operaciones, y las relaciones de los racionales, a estos números decimales no racionales. Es decir, dota de sentido numérico a los números decimales no racionales, a partir de los racionales. De esta forma demuestra que toda expresión numérica en notación decimal es un número real.
   c. Luego desarrolla una teoría general de las razones y las proporciones (en sus palabras), tanto aritméticas como geométricas. Este tratado de las razones y las proporciones cierra con la demostración de que dada cualquier para de cantidades magnitud, la razón entre ellas, en lenguaje moderno, o bien es una razón entera (cuando el consecuente mide de manera exacta al antecedente), o bien es una cantidad racional (cuando una parte alícuota de antecedente mide de manera exacta al antecedente), o es un número irracional, cuando ambas cantidades son inconmensurables entre sí.
   d. De esta manera, cierra el ciclo, mostrando que todo número en notación decimal o bien es racional, o irracional, y que, dado cualquier par de cantidades, conmensurables o no, su medida o bien es un número racional, o bien es un número irracional.

Como se puede ver de la anterior síntesis, su solución se basa en tres elementos: una noción general de magnitud, la razón entre las cantidades (conmensurables o no), y las propiedades del Sistema de numeración decimal. Con estos tres elementos, primero demuestra que el carácter de número de las “cantidades inconmensurables”, y luego, con recurso a una teoría general de razones y proporciones, demuestra que cualquier número, o es un racional, o es un irracional (el dominio de los números forma un continuo). Todo lo anterior tiene un telón de fondo que descansa sobre una intuición profunda de las propiedades topológicas de los números racionales e irracionales y la noción de límite, tanto como proceso, como objeto. Esto muestra una concepción moderna del número, en dónde este emerge de las razones entre cantidades de magnitud (en lenguaje moderno): *todos los números tienen el mismo fundamento epistemológico*.

Referencias

Cantor, G. (1915). *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers* (P. Jourdain, Trans.; 1 ed.). Dover Publications, INC.

Dedekind, R. (1927). *Continuidad y números Irracionales*. Retrieved junio from http://www.uv.es/jkliment/Documentos/Dedekind.pc.pdf

Liévano, I. (1856). *Tratado elemental de aritmetica*. Imprenta de Achavarría Hermanos. https://play.google.com/books/reader?id=JWtaAAAAcAAJ&pg=GBS.PP7